Poincaré face au négatif : une méthodologie ?

Thierry Paul

POINCARÉ FACE AU NÉGATIF : UNE MÉTHODOLOGIE ?

THIERRY PAUL

Résumé. Poincaré a eu au début de sa carrière lors de l'*erreur* du prix du Roi de Suède, et à la fin de sa vie dans un passionnant article sur les quanta, l'occasion de se confronter à des résultats négatifs. Il a d'ailleurs lourdement insisté sur cette (prétendue) négativité dans plusieurs écrits. Nous essayons dans ce court article de cibler ce qui suscite l'intérêt du négatif chez Poincaré. Nous évoquons comment il se pourrait qu'il y ait chez lui une véritable méthodologie de la dynamique du négatif, plutôt qu'une vision classique de la dualité positif/négatif.

Table des matières

1. Introduction

Poincaré termine l'introduction de son mémoire sur les trois corps par la phrase sibylline suivante :

"J'attire l'attention du lecteur sur les résultats négatifs présents dans ce mémoire...".

Sibylline, cette phrase l'est assurément si l'on songe aux deux cents pages qui suivent cette introduction. Mais cette phrase est aussi et surtout énigmatique. Énigmatique car placée à la fin de l'introduction d'un second mémoire succédant à un premier, positif celui-là, et incorrect, ou au moins incomplet.

Qu'est-ce qu'un résultat négatif pour Poincaré ? Nous reviendrons à cette question dans la dernière partie du présent texte, mais signalons dès à présent que LE résultat négatif du mémoire en question, celui qui s'opposerait au résultat positif du premier mémoire, serait la non intégrabilité du problème des trois corps. Un fait que l'on peut voir comme négatif, mais aussi comme positif : c'est tout simplement un énoncé. Or Poincaré n'attire pas notre attention sur UN résultat négatif, mais plutôt sur LES résultats négatifs présents dans le mémoire. C'est-à-dire sur un ensemble de faits qui, bien que vus comme négatifs par rapport à une problématique laplacienne préétablie et confortable pour une certaine vision du monde, vont déboucher sur un changement de paradigme aux immenses possibilités. Il est donc bien question ici, plus que d'une ontologie du positif et du négatif, d'une méthodologie d'étude de la flèche qui va de l'un à l'autre.

À l'autre extrémité de sa vie scientifique, et à la fin de sa vie tout court, se situent deux articles sur la théorie des quanta où Poincaré procède de la même attitude. Il s'agit pour lui d'essayer de dériver la formule de Planck à partir d'échanges d'énergie conduits seulement par des équations différentielles, c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse des quanta qui ne retient que des valeurs discrètes. Ici aussi la dérivation de la formule de Planck dans le paradigme continu est réconfortante et se voudrait rassurante vis-à-vis d'un certain conservatisme dont nous reparlerons plus loin. Mais Poincaré va "faillir à la tache" selon lui, et va échouer dans cette tentative : il va effectivement montrer que le résultat est négatif dans le sens que les seuls échanges énergétiques conduisant à la formule de Planck....sont précisément ceux qui implémentent l'hypothèse des quanta.

La mort l'a empêché d'aller plus loin et de nous livrer, peut-être, un nouveau paradigme qu'il pressent néanmoins dans l'introduction de l'un des deux articles :

[Si l'hypothèse de M. Planck était vraie,] "*les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton*".

Cette révolution naitra véritablement quatorze ans plus tard dans le discret tout d'abord (Heisenberg), puis un an après dans le continu (Schrödinger). En 1913 Niels Bohr donnait son modèle planétaire de l'atome d'hydrogène et la non-intégrabilité de l'atome d'Hélium, les trois corps quantiques, allait tracer la (longue) voie vers la mécanique des matrices. Poincaré était mort depuis un an. Parions qu'il se serait passionné pour cette superposition de deux problèmes qui occupèrent sa jeunesse pour l'un et sa maturité pour le second.

Mais si l'on veut vraiment comprendre le rapport de Poincaré au négatif, si l'on veut comprendre, par exemple, pourquoi il affuble de ce qualificatif généralement teinté d'insatisfaction les résultat du mémoire d'Acta - 200 pages - et de l'article - 30 pages - du Journal de Physique théorique et appliquée, il faut penser que, dans ces articles et d'autres sur les mêmes sujets, Poincaré s'intéresse plus à la dynamique de la preuve d'un résultat qu'au résultat lui-même. La dynamique (positive elle) qui amène une série à diverger, de même que le calcul (positif lui aussi) de la loi guidant les échanges énergétiques entre molécules et résonateurs sont plus importants aux yeux de Poincaré que la divergence de la série elle-même, qui détruit l'intégrabilité, et la forme même de la loi d'échange, qui valide l'hypothèse des quanta refusée a priori. Poincaré semble rester distant par rapport au résultat afin de pouvoir le qualifier de négatif sans aucune connotation dépréciative. Et s'il ne voit pas en négatif le négatif, c'est qu'il a su développer une méthodologie de déconstruction de l'erreur, du faux, qui ne s'appuie pas sur la perspective (morale en fait) de corriger.

Une méthodologie du négatif intrinsèque, en somme.

2. Mathématicien face à la physique

La physique a eu, on le sait, une importance considérable pour Poincaré. Dans son magnifique texte de Saint-Louis [20], lu lors du "Congrès d'Art et de Sciences", Poincaré aborde l'histoire récente de ce qu'il appelle la physique mathématique et qui est en fait ce que nous appelons de nos jours la physique théorique, la physique mathématisée livrée par la culture classique. Et il l'aborde sous l'angle de la crise, crise dont il envisage patiemment différentes issues, mais aussi pour laquelle il n'exclut pas une "fatal error".

Je ne discuterai bien sûr pas ici la valeur épistémologique de ce texte, mais je vais seulement essayer d'en souligner quelques irisations qui vont dans le sens du "négatif". Poincaré y parle dès la première page de crise qu'il souhaite analyser et pour laquelle, s'il *"répugne à donner un pronostic"*, il ne peut se *"dispenser d'[établir] un petit diagnostic"*. On voit bien là la distance qu'il prend avec la physique, et son gout pour la compréhension de l'erreur, du négatif.

Il me semble y avoir dans le choix du terme "physique mathématique", qu'il faut encore une fois comprendre dans le vocabulaire de notre époque par "physique théorique", la clé même de la méthodologie du négatif de Poincaré. Pour lui "physique mathématique" veut bien dire "physique mathématisée", exprimable dans le langage mathématique. Et c'est bien précisément de ce langage (divergence, séries, etc) que sortira le nouveau paradigme des systèmes dynamiques. Ce langage, Poincaré s'autorisera, si nécessaire, à le déconnecter de l'idée de rigueur. Nous le verrons clairement plus loin, lors de la discussion invoquant la masse de Dirac. Il s'agit pour lui d'une écriture de la physique (en crise vis-à-vis de ses principes) en termes mathématiques, en termes de mathématiciens, qu'il va alors pouvoir analyser, décortiquer, déconstruire même, afin de comprendre les raisons du malaise. Mais le but sera non pas de corriger un tel malaise, mais plutôt de lui donner un sens réel dans un nouveau paradigme : la divergences des séries perturbatives ne sont plus un obstacle à l'intégrabilité, elles sont la source de la sensibilité aux conditions initiales. Le négatif mathématique se projette dans un nouvel espace où il devient créatif.

Dans l'article de Saint-Louis [20], Poincaré passe en revue les principes de la physique théorique classique et dresse un certain bilan alarmant. Il se montre aussi assez critique à l'égard de certaines solutions à la crise évoquée, ou de certaines possibilités de solutions.

Parlant d'une extension du principe de relativité invoquant un rôle important donné à l'éther, il conclut

Mais, s'il peut tout expliquer, c'est qu'il nous permet de ne rien prévoir. . .

Plus loin, à propos d'un rôle aussi avantageux attribué au radium

Quelle explication avantageuse et combien elle est commode ! D'abord elle est invérifiable et par là même irréfutable. . .

Ne croit-on pas entendre là la critique d'une théorie à la mode de la physique fondamentale contemporaine ?

Mais il me semble que si Poincaré, encore une fois, consacre quelques vingt-deux pages à une description méticuleuse et négative de la physique du début du XXième siècle, c'est qu'il se place là aussi à une certaine distance de la physique théorique. Bien sûr il dit *nous* en parlant des acteurs d'une possible sortie de crise, mais, au fond, il ne prend pas vraiment parti concernant la physique, il reste en dehors. Et cette distance me semble de la même nature que celle que j'évoquais à la fin du paragraphe précédent.

Je vais me restreindre dans ce petit texte à deux exemples que l'on pourrait faire relever des mathématiques appliquées au sens moderne du terme. Mais l'attitude de Poincaré vis-à-vis du négatif que je viens de décrire me semble être tout à fait présente dans son rapport à la géométrie, et surtout aux fondements des mathématiques, en particulier lors de ses échanges avec Hilbert. Mais c'est là une tout autre histoire.

3. Deux problèmes qui hantent Henri Poincaré

Poincaré s'est preoccupé de physique tout au long de sa vie. De physique fondamentale on le sait, mais aussi de physique plus appliquée, comme le gros volume sur la théorie des marées en témoigne.

Mais il est deux sujets que, aux deux extrémités de sa carrière, il va prendre à bras le corps dans une volonté, a posteriori pour la première et délibérément a priori pour la seconde, d'investigation de deux paradigmes physiques emblématiquement "à problèmes" : la mécanique céleste (face au principe laplacien de stabilité) et la théorie quantique (face à l'hypothèse de discrétisation des échanges d'énergie proposée par Planck).

3.1. **La Mécanique Céleste.** Le problème des trois corps "réduit", planaire, était, à l'époque où Poincaré s'y intéresse, un défi scientifique important : il s'agissait de savoir si une petite perturbation d'un système stable allait entamer cette stabilité. Il s'agissait même de démontrer le contraire, ce dont très peu doutaient.

Les astronomes avaient depuis longtemps abordé ce problème perturbatif par une grande virtuosité dans l'établissement de développement en série, baignant dans un paradigme de l'analytique. La convergence de telles séries non seulement n'était même pas évoquée par eux, mais la difficulté résidait déjà dans l'obtention explicite de telles séries, des termes de ces séries. On sait que Poincaré pensa tout d'abord avoir montré leur convergence, et obtint le fameux prix du roi de Suède, puis que l'on s'aperçut d'une erreur, et on connait l'issue et l'attitude qu'adopta le grand mathématicien. Mais l'une des choses les plus remarquable lors de cette prise en charge du problème par Poincaré fut de comprendre le sens même d'une série perturbative.

Ainsi pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général :

$$\frac{1000^n}{1.2.3...n} \quad et \quad \frac{1.2.3...n}{1000^n}.$$

Les géomètres [mathématiciens] diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999999e ; mais regarderons la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.

Les astronomes [physiciens], au contraire, regarderons la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant, et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.

On voit tout de suite comment Poincaré, au fond, présente sans distinction de valeur la dualité convergent/divergent et place la discussion immédiatement dans une vision dynamique : une série n'est pas isomorphe au résultat numérique que sa convergence autorise, elle est un processus, un algorithme en mouvement et la convergence "à l'infini" n'est pas plus positive que la convergence des premiers termes, à l'efficacité reconnue.

Il me semble que l'on trouve là, déjà, une attitude que l'on peut faire relever d'une certaine vision du pragmatisme et qui sera tellement présente, plus tard, dans la contribution de Poincaré aux débats fondationnels.

3.2. **La Mécanique Quantique.** La Théorie Quantique est née en 1900, dans l'article fondateur de Planck. Elle mettra 25 ans à devenir la "Mécanique Quantique" lors de son acquisition d'une forme dynamique.

Poincaré s'intéresse très tard à la théorie des quanta. Invité au Congrès Solvay de 1911, il découvrit la problématique quantique et écrivit alors coup sur coup plusieurs articles sur le sujet. Certains de "vulgarisation" [16], et deux articles scientifiques [17, 18] dans lesquels il va s'efforcer de montrer que l'hypothèse de Planck peut être contournée et remplacée par une théorie "continue". Il s'agît pour lui de démontrer que la formule de Planck donnant la densité d'énergie du corps noir, et dérivée sous l'hypothèse des quanta (qui consiste, pour dire vite, à remplacer dans un calcul une intégrale par une somme mais sans passer à la limite comme dans l'intégrale de Riemann, c'est-à-dire à faire exactement ce que font nos ordinateurs) peut être déduite d'un modèle continu d'interaction entre rayonnement et molécules, c'est-à-dire gouverné par des équations différentielles. Le résultat que Poincaré lui-même présentera comme négatif validera en fait la théorie de Planck.

Ces deux articles sont peu cités de nos jours, mais ont eu un retentissement important à l'époque. En est la preuve le fait que deux articles [9, 14] dans le Volume 38 d'Acta Mathematica en hommage à Poincaré y sont consacrés. De plus l'argument de Poincaré sera repris et d'une certaine manière rendu plus rigoureux dans le célèbre traité de Mécanique Statistique de Fowler en 1929 [3]. Leur (re)lecture après plus d'un siècle de Mécanique Quantique est intéressante à plusieurs égards. En particulier ils montrent, à travers une discussion parfaitement technique, l'affrontement entre discret et continu, en ce début de XXième siècle où la problématique fondationnelle des mathématiques fait rage.

4. Solutions négatives I : de la non-convergence à la divergence

L'incidence des travaux de Poincaré sur la théorie des systèmes dynamiques a été énormément étudiée (contrairement à celle sur la théorie des quanta sur laquelle je m'étendrai donc plus longuement), je ne vais y consacrer que quelques lignes. On trouvera en particulier dans [21] une magnifique description de l'erreur "scandinave" de Poincaré.

Je voudrais simplement insister un peu sur l'énergie que met Poincaré à présenter, en particulier dans le Tome 2 des Méthodes Nouvelles, les aspects pratiques, techniques, pédestres même et négatifs des séries qu'il attribue, très généreusement il me semble, aux astronomes. Nombre de titres de chapitre font référence au négatif.

"Preuve de la divergence de la série de Linsted", voila bien un titre peu habituel. Montrer qu'une série diverge est difficile, souvent plus que sa convergence comme nous le savons tous. Il est bien plus facile de montrer la divergence des estimations, ce qui donne souvent peu d'information sur la divergence effective de ladite série, en raison du fait que, comme me l'a dit un jour un ami italien, la théorie des perturbations repose entièrement sur l'inégalité fondamentale

$$|1 - 1| \leq 2.$$

Comprendre pourquoi une série diverge non pas afin de la "rendre" convergente mais plutôt pour entrevoir un nouveau cadre dans lequel elle, en particulier son écriture, aurait un sens, est bien la démarche que Poincaré a érigé au niveau d'une méthode. Étudier les divergences des séries des astronomes pendant des centaines de pages comme Poincaré le fait dans le Tome 2 des "Méthodes Nouvelles", ce n'est pas chercher l'erreur, détecter la faille, le négatif dans l'expression analytique des termes d'une série pour les corriger.

C'est exhiber l'écriture du non.

5. Solutions négatives II : une preuve de la nécessité de l'hypothèse de Planck

Dans les deux articles [17] de 1911 (note aux CRAS) et [18] de 1912, Poincaré va donc essayer de se (nous, eux ?) rassurer en tentant de dériver la loi de Planck d'un modèle différentiel. Il va échouer (je le cite) et va présenter comme négatif,

"je dois prévenir le lecteur que je suis arrivé à un résultat négatif",

ce que Lorentz lui-même, dans la conclusion de [9], résume par

"On peut donc dire que la probabilité ω [dont je vais parler plus bas] est entièrement déterminée dès qu'on connaît la distribution de l'énergie pour toutes les températures. Il n'y a qu'une fonction ω pour une distribution qui est donnée en fonction de la température. Par conséquent, les hypothèses que nous avons faites sur ω et qui conduisent à la loi de Planck sont les seules qu'on puisse admettre.

Voilà le raisonnement par lequel Poincaré a établi la nécessité de l'hypothèse des quanta.

(...)

Ce nouvel examen conduit à la conclusion que l'énergie totale du rayonnement sera infinie à moins que l'intégrale $\int_0^{\eta_0} \omega \, d\eta$ ne tende pas vers zéro avec η_0. La fonction ω doit donc présenter au moins une discontinuité (pour $\eta = 0$), analogue à celles que donne la théorie des quanta."

Nous reviendrons bientôt sur cette "fonction" ω dont l'intégrale, non nulle, ne dépend pas des bornes d'intégration.

5.1. **L'article de Planck de 1900.** Nous n'allons pas ici rappeler la théorie du corps noir ni présenter en détail la contribution de Planck.

Disons seulement que le problème consiste à trouver une formule d'interpolation pour la densité d'énergie u d'un corps "noir", exprimée par rapport à la fréquence du rayonnement ν, telle que

$$u(\nu) \sim \nu^2,\ \ \nu \to 0$$

et

$$u(\nu) \sim e^{-cte\nu},\ \ \nu \to \infty.$$

Une formule simple est celle imaginée préalablement par Planck :

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

Et c'est cette loi qu'il dérive lui-même en 1900 sous l'hypothèse des quanta. Plus exactement il montre que, si l'on suppose que l'énergie de chaque oscillateur est un multiple entier d'une certaine quantité ϵ, donc de la forme $P\epsilon$, P entier, un calcul combinatoire donne que l'entropie S de chaque oscillateur est une fonction (explicite) de $\frac{U}{\epsilon}$, où U est l'énergie de chaque oscillateur. Plus précisément

$$S = k\left(\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right)log\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right)-\frac{U}{\epsilon}log\frac{U}{\epsilon}\right) \tag{5.1}$$

Utilisant la loi de Wien concernant la température

$$\frac{1}{kT} = \frac{dS}{dU},$$

où k est la constante de Boltzmann et un peu d'analyse dimensionnelle qui donne que $\epsilon = h.\nu$, où h a la dimension d'une action et ν l'inverse d'un temps, on peut intégrer (5.1). On obtient :

$$u := \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

C'est la loi de Planck.

5.2. **Le calcul "négatif" de Poincaré.** Nous allons examiner brièvement la stratégie de Poincaré visant à dériver la loi de Planck d'un modèle continu (voir [12] pour plus de détails). Poincaré va reprendre le calcul en partant d'un densité d'énergie w et montrer tout d'abord que si w est ce que l'on appellerait aujourd'hui un "peigne de Dirac" sur les entiers ($\times h$), il retrouve la loi de Planck. C'est donc en quelque sorte une vision plus mathématique, ou plutôt moins thermodynamique, que Planck ; mais il va surtout faire le chemin inverse, et "montrer" que la forme de la fonction u détermine w de façon univoque et donc que seule l'hypothèse des quanta donne le bon résultat.

Poincaré commence par montrer que la densité d'énergie

$$W(\eta_1,\dots,\eta_n;\xi_1,\dots,\xi_p)$$

(il écrit à l'époque $W(\eta_1,\ldots,\eta_n;\xi_1,\ldots,\xi_p)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p$ pour une densité) de n oscillateurs (identiques) d'énergies $\eta_1\ldots\eta_n$ et p molécules (identiques) d'énergie $\xi_1\ldots\xi_p$ peut prendre la forme :

$$W(\eta_1,\ldots,\eta_n;\xi_1,\ldots,\xi_p)=\Pi_{i=1}^n w(\eta_i)=w(\eta_1)...w(\eta_n)$$

pour une certaine fonction $w(\eta)$. C'est cette fonction w qu'il va montrer devoir avoir une primitive discontinue.

Pour cela il considère tout d'abord la surface d'énergie

$$S_h=\{(\eta_1,\ldots,\eta_n;\xi_1,\ldots,\xi_p)/\eta_1+\cdots+\eta_n+\xi_1+\cdots+\xi_p=h\}.$$

Puis les 3 intégrales :

$$\begin{aligned}
I &= \textstyle\int_S w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p \\
I' &= \textstyle\int_S(\eta_1+\cdots+\eta_n)w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p \\
I" &= \textstyle\int_S(\xi_1+\cdots+\xi_p)w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p.
\end{aligned}$$

Il définit alors les énergies moyennes des résonnateurs et des molécules, X et Y, par :

$$nYI=I' \text{ et } pXI=I''$$

Si l'on pose maintenant

$$\int_{\eta_1+\cdots+\eta_n=x} w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n=\phi(x), \tag{5.2}$$

un calcul simple donne

$$I=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^h(h-x)^{p-1}\phi(x)dx$$

De la même façon

$$I'=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^h x(h-x)^{p-1}\phi(x)dx$$

et

$$I''=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^h(h-x)(h-x)^{p-1}\phi(x)dx,$$

et finalement :

$$nY=\frac{\int_0^h x(h-x)^{p-1}\phi(x)dx}{\int_0^h(h-x)^{p-1}\phi(x)dx} \text{ et } pX=\frac{\int_0^h(h-x)^{p}\phi(x)dx}{\int_0^h(h-x)^{p-1}\phi(x)dx}.$$

Poincaré montre alors que l'on obtient la formule de Planck si l'on choisit pour w la "fonction" définie, à partir de $\epsilon>0$, de la façon suivante :

$$w(\eta)=0 \quad \text{si} \quad k\epsilon<\eta<k\epsilon+\mu,\ \forall k\in\mathbb{N},\ 0<\mu<\epsilon$$

et

$$\int_{k\epsilon}^{k\epsilon+\mu} w(\eta)d\eta = 1,\ \forall \mu, 0 < \mu < \epsilon.$$

Mais Poincaré de s'arrête pas là. Comme il l'a dit dans l'introduction de son article [18], il veut absolument s'assurer que ce choix de w est le seul qui donne la loi de Planck, et surtout qu'aucun choix "continue" ne redonne le même résultat. Nous allons présenter en même temps la dérivation directe et la solution du problème inverse.

Poincaré va montrer que le rapport $\frac{Y}{X}$ détermine w. Puisqu'il a montré que le choix discontinu donne la bonne formule il aura gagné (mais dira qu'il aura perdu).

L'argument utilise l'analyse complexe et nous allons le décrire rapidement. On introduit tout d'abord la transformée de Laplace (que Poincaré appelle "intégrale de Fourier") de w :

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta)e^{-\alpha\eta}d\eta.$$

w (et donc ϕ) est déterminé par Φ grâce à la formule d'inversion de la transformé de Laplace :

$$w(\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Phi(\alpha)e^{\alpha\eta}d\alpha,$$

où L est une droite complexe parallèle à l'axe imaginaire dans le demi-plan $\{\Re\alpha > 0\}$.

D'autre part, par définition de ϕ (5.2), on a :

$$(\Phi(\alpha))^n = \int_0^\infty \phi(x)e^{-\alpha x}dx,$$

puisque

$$\begin{aligned}
(\Phi(\alpha))^n &= \left(\int_0^\infty w(\eta)e^{-\alpha\eta}d\eta\right)^n \\
&= \int w(\eta_1)\dots w(\eta_n)e^{-\alpha(\eta_1+\dots+\eta_n)}d\eta_1\dots d\eta_n \\
&= \int_{x=0}^\infty \left(\int_{\eta_1+\dots+\eta_n=x} w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n\right)e^{-\alpha x}dx \\
&= \int_0^\infty \phi(x)e^{-\alpha x}dx.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L (\Phi(\alpha))^n e^{\alpha\eta}d\alpha,$$

et donc, après la renormalisation $x = n\omega,\ h = n\beta$, et avoir posé

$$\Theta(\alpha,\omega) := \Phi(\alpha)e^{\alpha\omega}(\beta-\omega)^{\frac{p}{n}},$$

on obtient :

$$nY = \frac{\frac{n^{p+1}}{2\pi i}\int_0^\beta \int_L \frac{\omega}{\beta-\omega}\Theta^n d\omega d\alpha}{\int_0^h (h-x)^{p-1}\phi(x)dx}$$

et

$$pX = \frac{\frac{n^{p+1}}{2\pi i}\int_0^\beta \int_L \Theta^n d\omega d\alpha}{\int_0^h (h-x)^{p-1}\phi(x)dx} \ . \tag{5.3}$$

Vient ensuite l'utilisation du fait que le système physique contient un grand nombre d'oscillateurs (on a un champ de rayonnement). Poincaré fait tout d'abord l'hypothèse que Θ atteint un maximum à $\omega = \omega_0$ et $\alpha = \alpha_0$.

Puisque n est très grand et que les intégrales précédentes font intervenir Θ^n, il en déduit, en choisissant $L = \{\Re z = \alpha_0\}$ que :

$$\frac{nY}{pX} \sim \frac{\omega_0}{\beta - \omega_0}. \tag{5.4}$$

mais puisque, par ailleurs, $nY + pX = h = n\beta$, on déduit que

$$Y = \omega_0 \quad \text{et} \quad X = \frac{\beta - \omega_0}{k}.$$

En fait Poincaré utilise le théorème de la phase stationnaire qui s'applique ici, puisque, à une constante près, les intégrales précédentes font intervenir la quantité $\Theta(\alpha,\omega)^n = e^{n\log(\Theta(\alpha,\omega)}$. En effet le numérateur de (5.3), par exemple, s'écrit :

$$\frac{n^{p+1}}{2\pi i}\int_0^\beta \int_L e^{n\log(\Theta(\alpha,\omega)} d\omega d\alpha.$$

Le théorème de la phase stationnaire dit alors que l'intégrale précédente se ramène, dans la limite $n \to \infty$, à la contribution de l'intégrant aux "points critiques" α_0 et ω_0 solutions des équations :

$$\frac{\partial \log(\Theta(\alpha,\omega)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \log(\Theta(\alpha,\omega)}{\partial \omega} = 0.$$

ce qui donne

$$\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)} + \omega_0 = 0$$

et

$$\alpha_0 - \frac{k}{\beta - \omega_o} = 0,$$

d'où (5.4).

On voit donc que $X = \frac{1}{\alpha_0}$.

Utilisant le fait (dans la théorie de Boltzmann) que l'énergie moyenne d'une molécule est proportionelle à la température (absolue) T on en déduit que :

$$\alpha_0 = \frac{C}{T} = \frac{1}{kT}$$

où C est une constante, et donc $Y = \omega_0 = -\frac{\Phi'(\alpha_0}{\Phi(\alpha_0)}$ nous donne l'énergie moyenne d'un résonnateur en fonction de la température (qui d'ailleurs sera indépendant du rapport $\frac{n}{p}$). Il suffit alors de remarquer que, si la fonction w satisfait l'hypothèse de Planck, alors :

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \int \sum_k \delta(\eta - k\epsilon) e^{-\alpha\eta} d\eta \\ &= \sum_k e^{-k\epsilon\alpha} \\ &= \frac{e^{-\epsilon\alpha}}{1 - e^{-\epsilon\alpha}} \\ &= \frac{1}{e^{\epsilon\alpha} - 1}.\end{aligned}$$

Et donc que, pour la densité U de la section précédente,

$$U = Y = -\frac{\Phi'(\alpha_0}{\Phi(\alpha_0)} = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

ce qui est la loi de Planck.

Mais supposons maintenant que l'on connaisse, *pour toutes les températures*, l'énergie moyenne d'un résonnateur. Alors on en déduira les valeurs de la fonction $\frac{d\log\Phi(\alpha)}{d\alpha}$ pour tous les $\alpha > 0$. Soit, à une constante multiplicative près, les valeurs de Φ sur l'axe réel, et par continuation analytique (nous dit Poincaré) à tout le demi-plan. Et donc, par la formule d'inversion précédemment énoncée, la fonction w sera déterminée (toujours à une constante multiplicative près).

Poincaré déduit alors de ce résultat d'unicité la nécessitée de l'hypothèse des quanta.

Finalement Poincaré montre encore que, sans se servir de la loi de Planck et en confrontant sa formule donnant l'énergie d'un résonnateur à celle du rayonnement du corps noir, w doit vérifier, sous peine que l'énergie totale diverge, que :

$$\lim_{\eta_0 \to 0} \int_0^{\eta_0} w(\eta) d\eta \neq 0.$$

C'est à dire que w doit être singulière. C'est cette singularité que Lorentz voyait comme une simple “discontinuité”, probablement influencé par la fonction de Heaviside utilisée depuis bien longtemps par les électriciens.

La condition que w soit "choisie” égale à 0 sauf pour $k\epsilon < \eta < k\epsilon + \delta$”, où "$\delta$ est un infiniment petit” et telle que :

$$\int_{k\epsilon}^{k\epsilon+\delta} w(\eta) d\eta = 1$$

s'exprime en langage moderne en disant que w est une distribution, somme de masses de Dirac sur le réseau $\{k\epsilon,\ k = 1,\ 2\ \ldots\}$ (bien sûr, pour être rigoureux, la condition intégrale devrait être $\int_{k\epsilon-\delta}^{k\epsilon+\delta} w(\eta) d\eta = 1$).

Ceci n'est jusque là qu'une redérivation de la formule de Planck. Mais c'est une dérivation sous forme intégrale et non plus combinatoire, donc plongée a priori dans le continu.

Cette fonction, mal définie mais bien "choisie", a-t-elle gêné Poinacré au point qu'il présente son résultat comme négatif ? Ces infiniment petits ambigus brouillent-ils les cartes mathématiques de la rigueur au point d'entamer aux yeux de Poincaré la valeur de son résultat ?

Je ne le pense pas. Tout d'abord parce que l'usage de ce terme était tout à fait fréquente à l'époque, et même plus tard si l'on de souvient de Goursat [4] :

"On dit qu'un nombre variable x a pour limite un nombre fixe a, ou tend vers a, lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ finit par devenir et "rester" plus petite que n'importe quel nombre positif donné à l'avance. Lorsque $a = 0$, le nombre x est dit "un infiniment petit"."

Je pense plutôt, encore une fois, que pour Poincaré le terme négatif n'a pas de valeur négative mais se place dans une dynamique "positif $\leftrightarrow$ négatif", dynamique ayant quant à elle une valeur positive.

6. Solutions négatives III : des "Méthodes nouvelles" à Heisenberg

Il est une autre incidence des travaux de Poincaré sur la physique quantique, absolument fondamentale et trop peu souvent évoquée, à mon gout, comme pierre constituante de la genèse de la Mécanique Quantique. C'est aussi un merveilleux lien entre les deux études de Poincaré dont nous venons de parler.

Entre le modèle de Bohr (1913), qui unifie l'hypothèse de Planck et le système planétaire à deux corps, et la mécanique des matrices de Heisenberg (1925), qui change drastiquement le paradigme de la dynamique, s'écoulent de nombreuses années pendant lesquelles on cherche à quantifier, au sens de Planck-Einstein-Bohr, les systèmes non-intégrables, au premier lieu desquels se trouve l'atome d'Hélium, système des trois corps atomique. Sans succès éclatant.

À Göttingen, Max Born a l'idée d'implémenter le processus de quantification des actions sur les séries de perturbation de la mécanique céleste dans la formulation de Poincaré. Dans [2] il consacre un chapitre aux Méthodes Nouvelles, chapitre qui constitue d'ailleurs un magnifique manuel de théorie des perturbations. C'est ce sujet qu'il propose à l'un de ses assistants, le très jeune Werner Heisenberg (l'autre assistant s'appelle Wolfgang Pauli...). Mais ce programme se conclut par un échec, comme Born le reconnait dans l'introduction de [2], datée de décembre 1924 et dans laquelle, prémonitoirement, il dit s'attendre bientôt à de profonds développements (!). La confrontation des calculs perturbatifs avec les valeurs expérimentales (ou plutôt les formules empiriques dérivées par les physiciens) s'avère non satisfaisante. Ici aucun problème de souci de convergence de séries, seuls les premiers termes comptent, dans l'esprit des séries asymptotiques évoquées plus haut. Mais ces premiers termes ne peuvent pas donner de bons résultats pour la simple raison que, contrairement aux masses des planètes et du soleil, les charges des électrons et celle du noyau (double) ont un rapport trop grand pour rendre significatifs les premiers termes de l'asymptotisme.

Cependant Max Born est pugnace et consacre une grande partie de son livre à ces calculs, tout comme était obsédé par ces séries Poincaré quelques trente ans plus tôt. Ces séries ne donneront rien pour l'Hélium pour les raisons juste évoquées, mais, tout comme pour les séries de Linsted appréhendées par Poincaré, leur étude "en négatif" permettra au jeune Heisenberg d'inventer un nouveau paradigme en "tournant" simplement le signe "$-$" des séries de Fourier $\hat{f}_{j-k}$, présentes dans les nombreuses convolutions des calculs perturbatifs de la mécanique céleste, en une virgule ",".

Celle des éléments de matrice $F_{j,k}$ d'un opérateur.

7. Entre conservatisme et obsession du négatif : une dynamique de pensée de Poincaré ?

Poincaré a la réputation d'avoir été conservateur. Comment cela se marie-t-il avec son gout du résultat négatif ? Il me semble que l'on peut rapprocher cette question de celle qui consiste à se demander s'il était mathématicien ou physicien.

En effet, son conservatisme n'a-t-il pas été à la fois le garde-fou le maintenant à distance d'une implication directe dans les bouleversements "révolutionnaires" de la physique au début du XXième siècle, et le moteur de sa démarche obstinée à déconstruire les résultats négatifs auxquels il a été confronté ? Que ce soit les siens propres (mécanique céleste ou mécanique quantique) ou ceux des autres, en particulier des physiciens, comme dans l'article de Saint-Louis ?

Car il s'agit bien, je trouve, d'une attitude de déconstruction : déconstruction de la notion de série en 1882 et déconstruction de la notion de fonction en 1912.

Série - pierre de touche du paradigme analytique - et fonction - élément central de l'analyse -, deux notions-clé du XIXième siècle que le XXième va profondément interpeller : théorème KAM pour les séries perturbatives de la dynamique et, à la même époque d'ailleurs, théorie des distributions qui va enfin donner un sens précis à la fonction ω vue plus haut, et si poétiquement définie par Henri Poincaré.

Annexe A. Quelques citations "en négatif" de Poincaré

"J'attire l'attention du lecteur sur les résultats négatifs présents dans ce mémoire..."

"je suis arrivé à un résultat négatif..."

"Preuve de la divergence de la série"

"Divergence des séries de M. Linstedt"

"La divergence de ces développements n'aurait d'inconvénient que si l'on voulait s'en servir pour établir rigoureusement certains résultats, par exemple la stabilité du système solaire"

"...je cherche à expliquer en quoi consiste ce malentendu entre les géomètres et les astronomes ; comment certaines séries que les premiers appellent divergentes peuvent rendre des services à ces derniers ..."

Références

[1] G. Bachelard, "Essai sur la connaissance approchée", Vrin, Paris 1969.

[2] M.Born, "Vorlesungen über Atommechanik", Springer, Berlin, 1925. English translation : "The mechanics of the atom", Ungar, New-York, 1927.

[3] R. H. Fowler, Statistical mechanics, Cambridge, 134-137, 1929.

[4] É. Goursat, " Cours d'analyse mathématique", Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[5] V. Jankélévitch, "Philosophie première. Introduction à une philosophie du presque", Gallimard, Paris, 1954.

[6] N. Kolmogorov, "The general theory of dynamical systems and classical mechanics", Proceedings of the International Comgres of Mathematicians", Amsterdam 1954, North-Holland, 1957.

[7] G. Longo, Savoir critique et savoir positif : l'importance des résultats négatifs. Intellectica, **40**, n.1, 2005 (english translation : "Information Technology and Media", web-page of the European Commission.)

[8] G. Longo et T. Paul, "Le monde et le calcul : réflexions sur calculabilité, mathématiques et physique", "Logique & Interaction : Géométrie de la cognition" Actes du colloque et école thématique du CNRS "Logique, Sciences, Philosophie" à Cerisy, Hermann, 2009.

[9] H. A. Lorentz, "Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique", Acta Mathematica, Vol. 38, 293-308, 1921.

[10] T. Paul, "Discrete-continuous and classical-quantum", "Mathematical Structures in Computer Science" **17**, p. 177-183, 2007.

[11] T. Paul, "On the status of perturbation theory", "Mathematical Structures in Computer Science" **17**, p. 277-288, 2007.

[12] T. Paul, “Poincaré et les quanta, Noésis **17**, p. 175-185, 2010.

[13] T. Paul, “Poincaré et la deconstruction du négatif”, ”Les mutations de l’écriture”, Presse de la Sorbonne, 2012.

[14] M. Planck, “Henri Poincaré und die Quantentheorie, Acta Mathematica, Vol. 38, 387-397, 1921.

[15] H. Poincaré, ”Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste”, Volume 2, Blanchard, Paris, 1987.

[16] H. Poincaré **Œuvres**, T 9., Gauthier-Villars, Paris 1954.

[17] H. Poincaré “Sur la théorie des quanta”, CRAS Vol. 153, p. 1103-1008, 1911.

[18] H. Poincaré “Sur la théorie des quanta”, J. de Physique théorique et appliquée, 5ième série, Vol. 2, p. 5-34, 1912.

[19] H. Poincaré “Sur le problèmes des trois corps et les équations de la dynamique”, Act Mathematica, vol. 13, 5-165, 1890.

[20] H. Poincaré “L’état actuel et l’avenir de la physique mathématique”, Conférence lue le 24 septembre 1904 au Congrès d’Árt et de Sciences de Saint-Louis, Bull. Sc. Math. 22, 302-324, 1904.

[21] J.M Yoccoz, “Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré, Conférence à la BNF, (13 avril 2005), SMF, Gazette des mathématiciens n° 107, 2006.

CNRS et CMLS École polytechnique, 91 128 Palaiseau cedex
E-mail address: `paul@math.polytechnique.fr`